

УДК 05.13.18+01.02.05

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ИЗВЛЕЧЕНИЯ НЕФТИ ПО ЭКОНОМИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ КАЧЕСТВА РЕШЕНИЯ

*В.Д. Слабнов*

### Аннотация

Предложена экономико-математическая модель задачи оптимального по экономическому критерию качества решения регулирования извлечения нефти. Процесс вытеснения нефти в слоистом пласте описывается трехмерной моделью двухфазной фильтрации по схеме Баклея – Леверетта. Параметры слоистого пласта могут изменяться вдоль осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Сформулированы четыре гипотезы о вытеснении нефти водой из элементарного объема слоистого пласта. Выполнено сравнение основных технико-экономических показателей извлечения нефти, полученных без учета и с учетом оптимального регулирования.

**Ключевые слова:** экономико-математическая модель, двухфазная фильтрация, вероятностный закон распределения, случайная величина, слоистый пласт, оптимальное регулирование.

---

### Введение

За последние годы наблюдается заметный прогресс в постановке и решении различных двумерных и трехмерных многофазных задач теории фильтрации, то есть задач прогнозирования показателей разработки сложных по строению нефтяных пластов. Одним из перспективных направлений в теории разработки нефтяных и газовых месторождений является решение задач регулирования текущего и конечного нефтеизвлечения. Данный класс задач, несмотря на свою значимость, является наименее исследованным в общей теории разработки нефтяных месторождений. Это прежде всего связано со значительными трудностями в построении алгоритмов решения таких задач. Новые технологии разработки, которые используют аппарат теории оптимального управления и современное математическое моделирование, будут способствовать достижению высоких технико-экономических показателей и повышению извлечения нефти из пластов различного строения. При заводнении неоднородных пластов термин «технология» подразумевает выявление наиболее экономичных или эффективных схем разработки. Критериями могут быть минимизация затрат ресурсов (денежных и материальных) или максимизация прибыли от извлеченной нефти [1, 2].

Внедрение в практику новой технологии основывается на составлении проекта. Основу проектирования составляют методы расчета технико-экономических показателей многовариантных вычислительных экспериментов при заводнении неоднородных пластов, их оценка и выбор наиболее рациональной из технологий заводнения.

Необходимость повышения рентабельности процесса добычи нефти из пластов сложного геологического строения, характеристики которых учитываются некоторым вероятностным законом, и определение технико-экономических показателей

регулирования процесса извлечения нефти по критерию максимальной денежной прибыли делают актуальной проблему построения экономико-математических моделей и выбора численных методов решения оптимизационных задач по экономическому критерию качества.

Преимущество двухмерной модели по сравнению с трехмерной обусловлено неполнотой геологической информации о строении трехмерного пласта, особенно на ранней стадии, и значительно меньшим временем численных расчетов за счет уменьшения размерности задачи и числа ячеек конечно-разностной сетки [3].

В настоящей работе используется модель Баклея – Леверетта процесса вытеснения нефти водой из слоистых пластов, в которой не учитываются гравитационные и капиллярные силы [4]. Рассмотрены четыре гипотезы о вытеснении нефти водой из элементарного объема слоистого пласта.

Предполагается, что параметры слоистого пласта, например абсолютная проницаемость, могут изменяться вдоль осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ .

Вероятностный закон распределения абсолютной проницаемости в слоистом пласте определяется на основе заданных параметров распределения: математического ожидания, дисперсии и некоторого дополнительного условия. Полученный вероятностный закон используется для построения «фиктивных» (модифицированных) относительных фазовых проницаемостей в слоистом пласте [5, 6].

Численное решение задачи регулирования для построенной усредненной математической модели позволяет определить с помощью симплекс-метода оптимальные дебиты и забойные давления источников и стоков при задании для них двусторонних ограничений и некоторых вариантов граничных условий в элементе заводнения. Критерием оптимальности является максимизация целевой функции, а именно денежной прибыли от суммарного отбора нефти с учетом некоторых экономических факторов разработки [1, 2].

Цель настоящей работы – построение экономико-математической модели двухфазной фильтрации в слоистом пласте при сформулированных нами четырех гипотезах о вытеснении нефти водой из элементарного объема; постановка задачи оптимального регулирования по технико-экономическому критерию качества решения; анализ результатов численного решения задачи оптимального регулирования при варьировании параметров распределения для двух дискретных аналогов вероятностных законов распределения абсолютной проницаемости, а также их сравнение с результатами численного решения задачи без регулирования в режиме заданных забойных давлений на различных сетках.

### 1. Математическая модель, описывающая процесс трехмерной двухфазной фильтрации в слоистых пластах

Рассмотрим пласт, в котором нефть вытесняется водой. Кровлю и подошву пласта считаем непроницаемыми. Введем прямоугольную декартову систему координат  $(x, y, z)$ . Выделим элементарный объем в виде цилиндра, ограниченного сверху кровлей, а снизу – подошвой. Его основанием будет служить элементарная площадка  $dx dy$ , а высотой – толщина пласта  $H$ .

Пласт неоднороден по абсолютной проницаемости, которая изменяется по горизонтали (оси  $OX$ ,  $OY$ ) и вертикали (ось  $OZ$ ) пласта. Это изменение хаотично, и можно считать, что пласт представляет собой  $n_k$  сред с различными значениями абсолютных проницаемостей. Поэтому  $j$ -й средой на произвольно выбранной вертикали пласта будем называть среду, содержащую все те пропластки этой вертикали, которые имеют абсолютную проницаемость  $k_{a(j)}$ . Будем полагать, что  $\partial p / \partial x$ ,  $\partial p / \partial y$  постоянны по вертикали и, в частности, не зависят от  $j$  [6].

Табл. 1

$k_{a(1)}$	$k_{a(2)}$	$k_{a(3)}$	$\dots$	$k_{a(n_k)}$
$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\dots$	$\beta_{n_k}$

Дискретный аналог вероятностного закона распределения абсолютной проницаемости  $k_a$  в слоистом пласте можно задавать с помощью ряда распределения, приведенного в табл. 1, где  $\beta_j$  – вероятность того, что абсолютная проницаемость примет значение  $k_{a(j)}$ .

Сделаем еще ряд предположений относительно механизма вытеснения нефти водой. Пусть каждая  $j$ -я среда с абсолютной проницаемостью  $k_{a(j)}$  имеет свои остаточную нефтенасыщенность  $s_{*н(j)}$  и долю связанной воды  $s_{*в(j)}$ , которые считаются известными. В этом случае максимальные значения насыщенных воды и нефти в каждом элементарном столбце есть

$$s_{в(j)}^* = 1 - s_{*н(j)}, \quad s_{н(j)}^* = 1 - s_{*в(j)},$$

где буквенные индексы “в”, “н” относятся к водной и нефтяной фазам соответственно.

В общем случае  $j$ -я среда может состоять из отдельных частей, которые расположены в разных местах элементарного столбца.

Пусть  $s_{в(j)}$ ,  $s_{н(j)}$  – водонасыщенность и нефтенасыщенность  $j$ -й среды соответственно. Если принять поровый объем  $j$ -й среды за единицу, то поровые объемы среды, занятые водой и нефтью, совпадают с величинами  $s_{в(j)}$ ,  $s_{н(j)}$ , а поровые объемы, которые максимально (минимально) заполнены водой или нефтью, будут равны  $s_{в(j)}^*$  ( $s_{*в(j)}$ ) или  $s_{н(j)}^*$  ( $s_{*н(j)}$ ) соответственно.

Определим активные нефтенасыщенность и водонасыщенность  $j$ -й среды как

$$\theta_j = \frac{s_{н(j)} - s_{*н(j)}}{s_{н(j)}^* - s_{*н(j)}}, \quad 1 - \theta_j = \frac{s_{в(j)} - s_{*в(j)}}{s_{в(j)}^* - s_{*в(j)}}. \quad (1)$$

Из (1) нефте- и водонасыщенность  $j$ -й среды можно представить в виде

$$s_{н(j)} = s_{*н(j)} (1 - \theta_j) + s_{н(j)}^* \theta_j, \quad s_{в(j)} = s_{*в(j)} \theta_j + s_{в(j)}^* (1 - \theta_j).$$

Тогда нефте- и водонасыщенность в элементарном объеме вычисляются по формулам

$$s_{н} = \sum_{j=1}^{n_k} s_{*н(j)} (1 - \theta_j) \beta_j + \sum_{j=1}^{n_k} s_{н(j)}^* \theta_j \beta_j, \quad s_{в} = \sum_{j=1}^{n_k} s_{*в(j)} \theta_j \beta_j + \sum_{j=1}^{n_k} s_{в(j)}^* (1 - \theta_j) \beta_j. \quad (2)$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{n_k} \theta_j \beta_j + \sum_{j=1}^{n_k} (1 - \theta_j) \beta_j = 1.$$

Обозначим через  $k_{в(j)}(s_{в})$ ,  $k_{н(j)}(s_{н})$  относительные фазовые проницаемости воды и нефти в  $j$ -й среде соответственно. В соответствии с (2) они будут зависеть от величины  $\theta_j$ .

Составим уравнения материального баланса для  $i$ -й жидкости, исходя из ее параметров, которые приведены выше:

$$\partial \left[ \left( \left( H \tilde{k}_a k_{в}^{\Phi} \right) / \mu_{в} \right) \partial p / \partial x \right] / \partial x + \partial \left[ \left( \left( H \tilde{k}_a k_{н}^{\Phi} \right) / \mu_{н} \right) \partial p / \partial y \right] / \partial y = -mH \partial s_{в} / \partial t,$$

$$\partial \left[ \left( \left( H \tilde{k}_a k_n^\Phi \right) / \mu_n \right) \partial p / \partial x \right] / \partial x + \partial \left[ \left( \left( H \tilde{k}_a k_n^\Phi \right) / \mu_n \right) \partial p / \partial y \right] / \partial y = -mH \partial s_n / \partial t, \quad (3)$$

где  $H$  – толщина пласта,  $m$  – пористость пласта,  $t$  – время,  $\mu_v$  и  $\mu_n$  – вязкости воды и нефти соответственно.

В данной математической модели «фиктивные» относительные фазовые проницаемости  $k_i^\Phi(s_i)$   $i = v, n$ , получены на основе известных максимальных значений относительных фазовых проницаемостей, активных насыщенностей сред и вероятностного закона распределения абсолютной проницаемости по толщине пласта.

Таким образом, математическую модель вытеснения нефти из пласта толщиной  $H$ , в котором абсолютная проницаемость изменяется по горизонтали и вертикали, при некоторых допущениях удается свести к математической модели процесса фильтрации в некотором пласте с усредненной абсолютной проницаемостью по толщине пласта и построенных «фиктивных» относительных фазовых проницаемостей.

Систему уравнений (3) после несложных преобразований с использованием закона Дарси можно привести к системе уравнений относительно усредненной скорости фильтрации  $\tilde{V}$  и нефтенасыщенности  $s$

$$\operatorname{div}(\tilde{V}H) = \tilde{q}, \quad \operatorname{div}(\tilde{V}H\tilde{F}(s)) = mH \partial s / \partial t, \quad (4)$$

где  $\tilde{V} = -\tilde{\sigma}(s) \operatorname{grad} p$  – суммарная усредненная скорость фильтрации нефти и воды,  $p$  – пластовое давление,  $\tilde{q}$  – усредненный дебит скважины,  $\tilde{\sigma}(s) = \tilde{k}_a(k_n^\Phi(s)/\mu_n + k_v^\Phi(s)/\mu_v)$  – суммарная усредненная проводимость в слоистом пласте,  $\tilde{F}(s) = \tilde{k}_a((k_n^\Phi(s)/\mu_n)/\tilde{\sigma}(s))$  – усредненная доля нефти в потоке жидкости,

$$k_n^\Phi(s_n) = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j k_{a(j)} k_{n(j)}(s_n) / \tilde{k}_a, \quad k_v^\Phi(s_v) = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j k_{a(j)} k_{v(j)}(s_v) / \tilde{k}_a. \quad (5)$$

Для решения системы уравнений (4) требуется знать вид «фиктивных» относительных фазовых проницаемостей (5) по заданному вероятностному закону распределения случайной величины или вид ряда распределения абсолютной проницаемости в каждой точке усредненного слоистого пласта.

## 2. Постановка задачи оптимального регулирования извлечения нефти по экономическому критерию качества решения

Постановка задачи регулирования при двухфазной фильтрации с учетом ввода скважин в эксплуатацию на основе математической модели Баклея – Леверетта (4) с начальными и граничными условиями и алгоритм ее решения были приведены в работе [7]. Пронумеруем скважины в области фильтрации (см. рис. 1). Множество номеров добывающих скважин обозначим через  $J^*$ , нагнетательных – через  $J \setminus J^*$ , где  $J$  – множество номеров всех скважин. Предполагается, что срок разработки залежи  $T$  определяется временем отключения последней действующей добывающей скважины. Отключение  $k$ -й добывающей скважины происходит при  $T_k \leq t \leq T$ , где  $T_k$  – время достижения  $k$ -й скважиной заданного предельно-допустимого значения текущей обводненности ее продукции  $F_{vk}^* = 1 - F(T_k)$ . Будем рассматривать регулирование процесса нефтедобычи из неоднородной залежи в условиях принятой модели по критерию максимизации денежной прибыли текущей нефтеотдачи на заданные моменты времени  $t_r$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$

Экономико-математическая задача такого процесса регулирования нефтеизвлечения формулируется следующим образом: найти максимальную денежную прибыль от суммарного отбора нефти с учетом экономических факторов разработки

$$C \sum_{k \in J^*(t_r)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{q}_k(t_r) \tilde{F}_{hk}(t_r) - \left( C_1 \sum_{k \in J^*(t_r)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{q}_k(t_r) \tilde{F}_{hk}(t_r) + C_2 \sum_{k \in J^*(t_r)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{q}_k(t_r) \tilde{F}_{bk}(t_r) \right) - C_3 \sum_{k \in J(t_r) \setminus J^*(t_r)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{q}_k(t_r) \tilde{F}_{bk}(t_r) dt_r \rightarrow \max, \quad t_r \in [t_n, t_{n+1}],$$

для заданного планового периода  $[t_n, t_{n+1}]$  и ограничений на режимы действующего фонда скважин

$$p^* \leq p_{zk} \leq p^{**}, \quad q^* \leq |q_k| \leq q^{**} \quad \forall k \in J^*(t_r)$$

с учетом момента времени  $t_r$  (начала численного решения задачи прогнозирования), который определяется из условия

$$t_r = t(\tilde{F}_{bk}(t_r)) \geq t(\tilde{F}_{bk}^*(t_r)) \quad \forall k \in J^*(t_r),$$

где номера добывающих и нагнетательных скважин соответствуют оптимальному подмножеству  $J^*(t_r) \cup J(t_r) \setminus J^*(t_r)$ .

Здесь  $\tilde{q}_k(t_r)$  – усредненный дебит  $k$ -й скважины,  $\tilde{F}_{bk}(t_r)$  – усредненная доля воды в потоке жидкости для  $k$ -й скважины,  $p_{zk}(t_r)$  – забойное давление  $k$ -й скважины на момент времени  $t_r$ .

При численном решении задачи регулирования нефтеизвлечения для каждого момента времени  $t_r$  восстанавливается оптимальное поле давления в области фильтрации  $D$  в результате численного решения задачи линейного программирования (6)–(8) [6, 8]:

$$C \sum_{k \in J^*(t_r)} \alpha \tilde{\sigma}^k(s(t_r))(p_{ij}^k(t_r) - p_{zk}(t_r)) \tilde{F}_{hk}(t_r) - \left( C_1 \sum_{k \in J^*(t_r)} \alpha \tilde{\sigma}^k(s(t_r))(p_{ij}^k(t_r) - p_{zk}(t_r)) \tilde{F}_{hk}(t_r) + C_2 \sum_{k \in J^*(t_r)} \alpha \tilde{\sigma}^k(s(t_r))(p_{ij}^k(t_r) - p_{zk}(t_r)) \tilde{F}_{bk}(t_r) \right) - C_3 \sum_{k \in J(t_r) \setminus J^*(t_r)} \alpha \tilde{\sigma}^k(s(t_r))(p_{ij}^k(t_r) - p_{zk}(t_r)) \tilde{F}_{bk}(t_r) \rightarrow \max, \quad t_r \in [t_n, t_{n+1}], \quad (6)$$

при ограничениях

$$\tilde{\sigma}_{i-1j} p_{i-1j} + \tilde{\sigma}_{i+1j} p_{i+1j} + \tilde{\sigma}_{ij-1} p_{ij-1} + \tilde{\sigma}_{ij+1} p_{ij+1} + (\tilde{\sigma}_{ij} + \alpha \delta_{ij}) p_{ij} + \alpha \delta_{ij} p_{zk} = 0, \quad (7)$$

$$p^* \leq p_{zk} \leq p^{**}, \quad q^* \leq |\alpha \tilde{\sigma}^k(s(t_r))(p_{ij}^k(t_r) - p_{zk}(t_r))| \leq q^{**} \quad \forall k \in J^*(t_r), \quad (8)$$

где  $C = 80$ ,  $C_1 = 14$ ,  $C_2 = 18$ ,  $C_3 = 32$ ,  $i = 1, \dots, M_x$ ,  $j = 1, \dots, M_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  – количество узлов по оси  $OX$  и  $OY$  соответственно,  $p_{zk}$  – забойное давление скважин с координатами  $(x_k, y_k)$ ,  $p_{ij}$  – сеточное давление по области фильтрации  $D$ ,  $\delta_{ij}$  –

сеточный аналог функции Дирака,  $p^*, p^{**}$  – нижнее и верхнее ограничения на забойные давления скважин соответственно,  $q^*, q^{**}$  – нижнее и верхнее ограничения на дебиты скважин соответственно.

Найденное поле давления, а также значения оптимальных забойных давлений и дебитов действующих скважин при решении задачи оптимального регулирования процесса извлечения нефти обеспечивают максимальную денежную прибыль от суммарного отбора нефти из неоднородного пласта с учетом экономических факторов разработки на момент времени  $t_r$ . Здесь алгоритм линейного программирования используется одновременно в качестве метода решения системы алгебраических уравнений, полученных из разностного аналога (7) для первого уравнения системы (4).

### 3. Вычислительные эксперименты

Рассмотрена модель неоднородного пласта прямоугольной конфигурации  $D = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ , вскрытого девятиточечным элементом заводнения, для  $a = b = 850$  м,  $H = 5$  м,  $m = 0.2$ ,  $\mu_n = 3$  мПа·с,  $\mu_v = 1$  мПа·с,  $s_* = 0.26$ ,  $s^* = 0.8$ ,  $p_k = 22$  МПа,  $p^* = 12.5$  МПа,  $p^{**} = 22$  МПа,  $q^* = 1$  м<sup>3</sup>/сут,  $q^{**} = 500$  м<sup>3</sup>/сут,  $h_x = h_y = 25$  м. Относительные фазовые проницаемости  $k_n^F(s)$ ,  $k_v^F(s)$  – нелинейные полиномы [5, 6, 9]. Проведена серия численных экспериментов для рассмотренного выше элемента заводнения при следующих четырех гипотезах о характере вытеснения нефти водой.

1. В первую очередь вода вытесняет нефть из участков (зон) пласта с наилучшей абсолютной проницаемостью, при этом каждый элементарный объем разбивается на две зоны: водную и нефтяную (нефтенасыщенность в водной зоне предполагается остаточной, а в нефтяной зоне – максимальной). Разделение на две зоны определяется найденным значением абсолютной проницаемости, которое будем называть пороговым значением.

2. В первую очередь вода вытесняет нефть из участков (зон) пласта с наихудшей абсолютной проницаемостью, при этом каждый элементарный объем разбивается пороговым значением на две зоны: водную и нефтяную (в водной зоне нефтенасыщенность предполагается остаточной, в нефтяной зоне нефтенасыщенность – максимальной).

3. Вода вытесняет нефть пропорционально найденному переменному коэффициенту.

4. Обобщение гипотез 1 и 3. Каждый элементарный объем разбивается пороговым значением на две зоны: водную и нефтяную, причем в зоне с наихудшей абсолютной проницаемостью нефтенасыщенность имеет максимальное значение, а в зоне с наилучшей абсолютной проницаемостью происходит неполное вытеснение нефти водой пропорционально найденному переменному коэффициенту.

Оптимальные экономико-технологические показатели процесса извлечения нефти из слоистого пласта для рассмотренных выше гипотез определялись на основе численного решения задачи регулирования, когда пластовое и забойные давления действующих скважин определялись по предложенному алгоритму. Они сравнивались с неоптимальными экономико-технологическими показателями, полученными на основе численного решения задачи прогнозирования, когда пластовое давление определялось по методу переменных направлений, а забойные давления скважин были заданы.

На рис. 1 показано размещение 9 скважин в элементе заводнения для следующего варианта задания граничных условий: на нижней стороне задано граничное

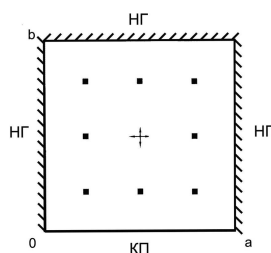


Рис. 1. Элемент заводнения слоистого пласта

Табл. 2

Равномерный закон,  $\tilde{k}_a = 0.1$ ,  $\sigma^2 = 0.001$

$\tilde{k}_{a(j)}$	0.051	0.063	0.075	0.087	0.100	0.112	0.124	0.136	0.149
$\beta_j$	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111

Табл. 3

Логарифмически-нормальный закон,  $\tilde{k}_a = 0.1$ ,  $\sigma^2 = 0.001$

$\tilde{k}_{a(j)}$	0.058	0.078	0.098	0.118	0.137	0.157	0.177	0.196	0.216
$\beta_j$	0.050	0.400	0.300	0.100	0.050	0.040	0.030	0.020	0.010

условие I рода, соответствующее контуру питания (КП), на трех остальных сторонах – граничное условие II рода, соответствующее непроницаемой границе (НГ). Математическое ожидание для абсолютной проницаемости  $\tilde{k}_a(x, y)$  в области двухфазной фильтрации  $D$  элемента заводнения принимает следующие значения:  $\tilde{k}_a = 0.1, 0.3$  мкм<sup>2</sup>, а дисперсия –  $\sigma^2 = 0.001, 0.01$ .

Вычислительные эксперименты проводились для дискретных аналогов двух законов распределения:

- 1) ряд распределения с одинаковыми вероятностями того, что случайная величина  $\tilde{k}_a$  по толщине пласта примет данное значение (дискретный аналог равномерного закона распределения случайной величины, табл. 2);
- 2) ряд распределения с различными вероятностями того, что случайная величина  $\tilde{k}_a$  по толщине пласта примет данное значение (дискретный аналог логарифмически-нормального закона распределения случайной величины, табл. 3).

В табл. 4 приведены значения коэффициента прокачки в поровых объемах и соответствующие им значения общей денежной прибыли  $\Pi$  (тыс. у.е.) с учетом экономических факторов разработки (динамики тренда цены на нефть) для двух законов распределения случайной величины и видов вытеснения нефти водой из элементарного объема слоистого пласта.

Анализируя данные табл. 3 и рис. 2, можно сделать вывод о том, что гипотезы 1 и 2 соответствуют нижнему и верхнему графикам значений общей денежной прибыли  $\Pi(\tau)$  с учетом экономических факторов разработки от коэффициента прокачки поровых объемов  $\tau$ . Существует предельное значение коэффициента прокачки, после которого разработка слоистого пласта становится нерентабельной вследствие падения общей денежной прибыли.

Характер расположения графиков сохраняется как для одинаковых  $\tilde{k}_a$ , но разных  $\sigma^2$ , так и для одинаковых  $\sigma^2$ , но разных  $\tilde{k}_a$ . Графики общей денежной прибыли  $\Pi(\tau)$  с учетом некоторых экономических факторов разработки от коэффициента прокачки поровых объемов  $\tau$  для гипотез 3 и 4 расположены между

Табл. 4

Значения коэффициента прокачки и общей прибыли

Вид закона распределения		Дискретный аналог равномерного закона			Дискретный аналог логарифмически-нормального закона		
Номер гипотезы		1	2	4	1	2	4
$\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ $\sigma^2 = 0.001$	$\tau$	3.744	3.624	3.719	3.737	3.635	3.675
	$\Pi(\tau)$	1294	1795	1531	1397	1774	1612
$\tilde{k}_a = 0.3 \text{ мкм}^2$ $\sigma^2 = 0.001$	$\tau$	3.719	3.702	3.662	3.725	3.72	3.645
	$\Pi(\tau)$	1477	1724	1655	1492	1727	1676
$\tilde{k}_a = 0.3 \text{ мкм}^2$ $\sigma^2 = 0.01$	$\tau$	3.747	3.617	3.696	3.738	3.625	3.677
	$\Pi(\tau)$	1275	1790	1553	1387	1783	1606

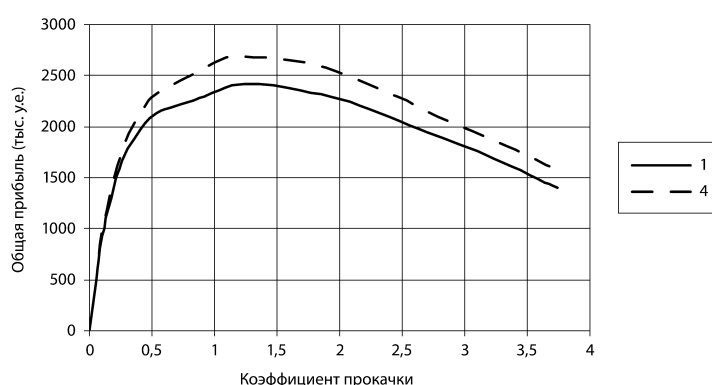


Рис. 2. Графики 1,4 зависимости общей денежной прибыли  $\Pi(\tau)$  от коэффициента прокачки поровых объемов для гипотез 1, 4 о вытеснении нефти водой в слоистом пласте соответственно. Дискретный аналог логарифмически-нормального закона,  $\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$

графиками гипотез 1 и 2. Показатели общей денежной прибыли для гипотезы 4 лучше, чем для гипотезы 3, в случае использования дискретного аналога равномерного и логарифмически-нормального законов.

На рис. 3 приведены кривые зависимости общей денежной прибыли  $\Pi(\tau)$  с учетом некоторых экономических факторов разработки от коэффициента прокачки поровых объемов без учета и с учетом оптимального регулирования для дискретного аналога равномерного закона с использованием гипотез 1, 4. Анализ графиков показывает значительное превышение общей денежной прибыли с учетом оптимального регулирования над аналогичным показателем без учета оптимального регулирования разработки слоистого пласта. С учетом оптимального регулирования эксплуатация слоистого пласта становится рентабельной на весь срок разработки по сравнению с эксплуатацией на предельных режимах.

На рис. 4–6 и 7–9 приведены динамики технологических показателей (забойных давлений, дебитов и обводненности) действующих скважин с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8 в элементе заводнения слоистого пласта от коэффициента прокачки поровых объемов без учета и с учетом оптимального регулирования. Рассмотрен дискретный аналог равномерного закона, для которого  $k_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$ .



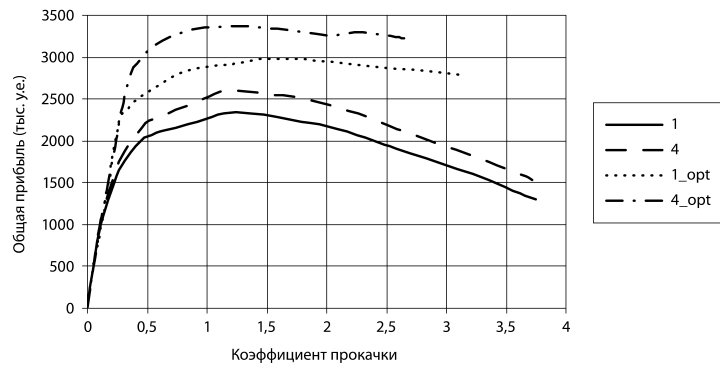


Рис. 3. Графики 1, 4 и 1\_opt, 4\_opt зависимости общей денежной прибыли  $\Pi(\tau)$  от коэффициента прокачки поровых объемов для гипотез 1, 4 о вытеснении нефти водой в слоистом пласте без учета и с учетом оптимального регулирования соответственно. Дискретный аналог равномерного закона,  $\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$

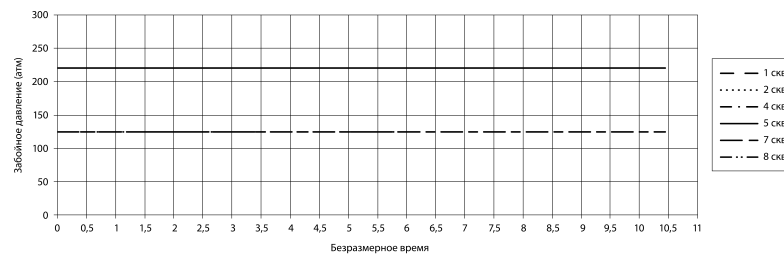


Рис. 4. Графики 1, 2, 4, 5, 7, 8 зависимости забойных давлений  $p_z(\bar{t})$  от безразмерного времени  $\bar{t}$  для скважин с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8 в элементе заводнения слоистого пласта (рис. 1) без учета оптимального регулирования. Дискретный аналог равномерного закона,  $\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$

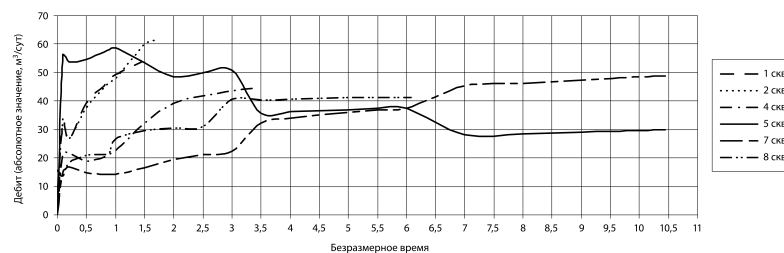


Рис. 5. Графики 1, 2, 4, 5, 7, 8 зависимости дебитов  $q(\bar{t})$  от безразмерного времени  $\bar{t}$  для скважин с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8 в элементе заводнения слоистого пласта (рис. 1) без учета оптимального регулирования. Дискретный аналог равномерного закона,  $\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$

Отметим, что на рис. 4 забойные давления добывающих скважин с номерами 1, 2, 4, 7, 8 принимают нижнее значение из интервала эксплуатации, а забойное давление нагнетательной скважины с номером 5 – верхнее значение. Поэтому графики забойных давлений добывающих скважин накладываются друг на друга,

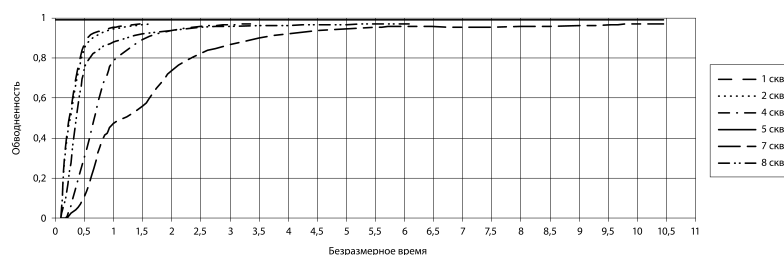


Рис. 6. Графики 1, 2, 4, 5, 7, 8 зависимости обводненности  $f(\bar{t})$  от безразмерного времени  $\bar{t}$  для скважин с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8 в элементе заводнения слоистого пласта (рис. 1) без учета оптимального регулирования. Дискретный аналог равномерного закона,  $\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$

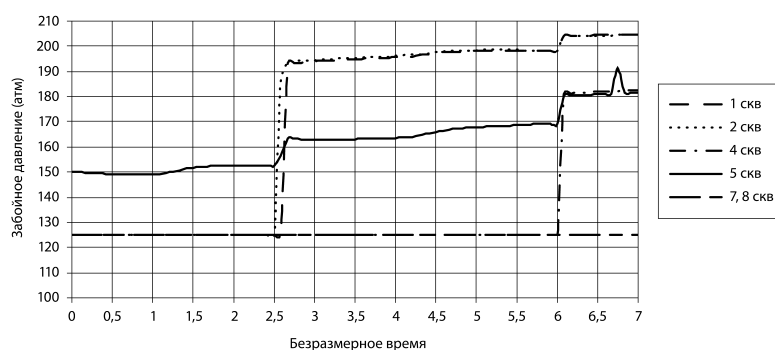


Рис. 7. Графики 1, 2, 4, 5, 7, 8 зависимости забойных давлений  $p_z(\bar{t})$  от безразмерного времени  $\bar{t}$  для скважин с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8 в элементе заводнения слоистого пласта (рис. 1) с учетом оптимального регулирования. Дискретный аналог равномерного закона,  $\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$

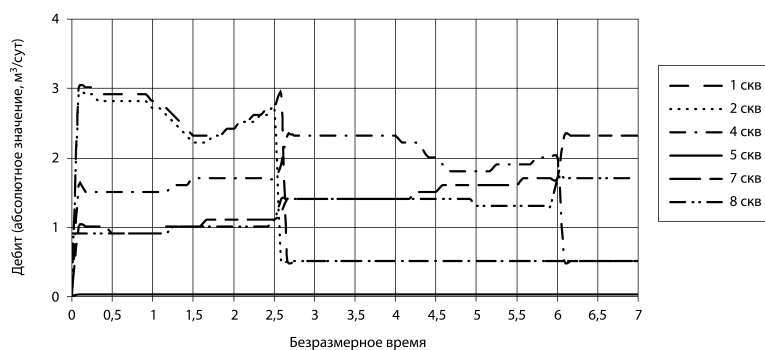


Рис. 8. Графики 1, 2, 4, 5, 7, 8 зависимости дебитов  $q(\bar{t})$  от безразмерного времени  $\bar{t}$  для скважин с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8 в элементе заводнения слоистого пласта (рис. 1) с учетом оптимального регулирования. Дискретный аналог равномерного закона,  $\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$

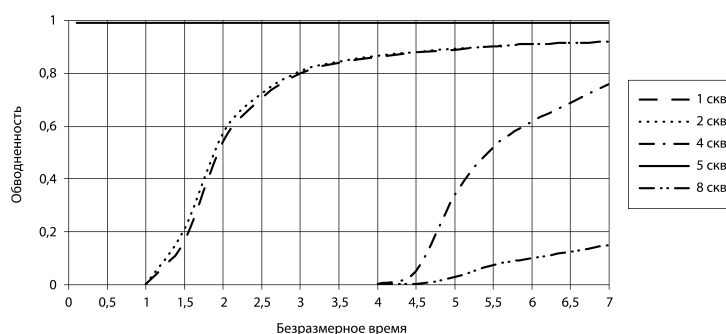


Рис. 9. Графики 1, 2, 4, 5, 7, 8 зависимости обводненности  $f(\bar{t})$  от безразмерного времени  $\bar{t}$  для скважин с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8 в элементе заводнения слоистого пласта (рис. 1) с учетом оптимального регулирования. Дискретный аналог равномерного закона,  $\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$

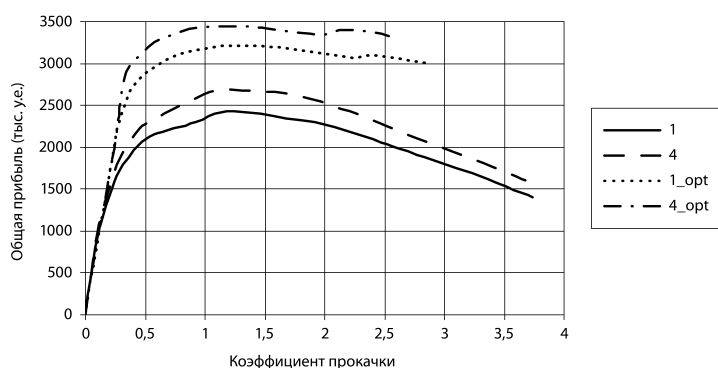


Рис. 10. Графики 1, 4 и 1\_opt, 4\_opt зависимости общей денежной прибыли  $\Pi(\tau)$  от коэффициента прокачки поровых объемов для гипотез 1, 4 о вытеснении нефти водой в слоистом пласте без учета и с учетом оптимального регулирования соответственно. Дискретный аналог логарифмически-нормального закона,  $\tilde{k}_a = 0.1 \text{ мкм}^2$ ;  $\sigma^2 = 0.001$

отличаясь в динамике максимальным значением коэффициента прокачки, которое соответствует отключению скважины из эксплуатации.

На основании сравнения графиков, представленных на рис. 4–6 и 7–9, соответственно, можно заключить, что использование регулирования разработки слоистого пласта в соответствии с экономическим критерием качества решения влияет на технологические показатели разработки, что, в свою очередь, влияет на экономические показатели. Использование технологии оптимального регулирования позволяет добиться того, что дебиты скважин находятся в заданных интервалах эксплуатации, и улучшить динамику обводнения скважин, увеличивая тем самым безводный период эксплуатации.

На рис. 10 приведены графики зависимости общей денежной прибыли  $\Pi(\tau)$  с учетом экономических факторов разработки от коэффициента прокачки поровых объемов  $\tau$  без учета и с учетом оптимального регулирования для дискретного аналога логарифмически-нормального закона с использованием гипотез 1, 4. Анализ графиков показывает значительное превышение общей денежной прибыли с учетом оптимального регулирования над аналогичным показателем без учета

оптимального регулирования разработки слоистого пласта. С применением оптимального регулирования эксплуатация слоистого пласта становится рентабельной на весь срок разработки по сравнению с эксплуатацией на предельных режимах, что полностью согласуется с выводами, полученными для дискретного аналога равномерного закона при прочих равных условиях.

Это объясняется оптимальной динамикой изменения поля скорости нефти в области двухфазной фильтрации элемента заводнения слоистого пласта.

### Заключение

Рассмотрена трехмерная задача вытеснения нефти в слоистом пласте. Предложена экономико-математическая модель задачи оптимального регулирования процесса извлечения нефти по экономическому критерию качества решения. Коллекторские свойства слоистого пласта могут изменяться вдоль осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ .

Рассмотрены равномерный и логарифмически-нормальный законы распределения случайной величины (абсолютной проницаемости) по толщине пласта. Сформулированы четыре гипотезы о вытеснении нефти водой из элементарного объема слоистого пласта.

Создан вычислительный алгоритм для определения «фиктивных» (модифицированных) относительных фазовых проницаемостей на основе предложенных четырех гипотез для произвольного дискретного аналога вероятностного закона распределения (абсолютной проницаемости).

Предложена постановка усредненной двухмерной нестационарной задачи оптимального регулирования извлечения нефти из слоистого пласта. Критерий качества решения – максимальная денежная прибыль суммарного отбора нефти с учетом динамики тренда цены на нефть при разработке слоистого пласта. Приведен алгоритм решения задачи. Рассмотрен элемент заводнения с учетом заданных краевых условий.

На основе анализа численных экспериментов показано, что математическое ожидание и дисперсия оказывают влияние на технико-экономические показатели численных решений задач оптимального регулирования и прогнозирования. Использование регулирования улучшило данные показатели разработки и сделало их рентабельными по сравнению с прогнозированием.

Данная постановка позволяет решать задачи оптимального регулирования с учетом экономического критерия качества решения в элементе заводнения с нерегулярной сеткой скважин и заданием на сторонах элемента заводнения граничных условий I, II рода или их комбинации.

### Summary

*V.D. Slabnov.* Numerical Investigation of the Oil Extraction Control Problem by the Economic Criterion of Solution Quality.

We propose an economic and mathematical model of the optimal control problem for oil extraction according to the economic criterion of solution quality. The process of oil displacement in a layered reservoir is described by a 3D model of two-phase flow using the Buckley–Leverett scheme. The reservoir characteristics can change along  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  axes. We formulate four hypotheses about water-oil displacement from the elementary volume of the layered reservoir, and describe a computational algorithm for defining “fictitious” (modified) relative permeabilities for a difference discrete analogue of random distribution. We also compare the basic engineering and economic performances of oil extraction both with and without regard to optimal control.

**Keywords:** economic and mathematical model, two-phase flow, probability law of distribution, random variable, layered reservoir, optimal control.

**Литература**

1. Халимов Э.М., Леви Б.И., Дзюба В.И., Пономарев С.А. Технология повышения нефтеотдачи пластов. – М.: Недра, 1984. – 271 с.
2. Муслимов Р.Х. Особенности разведки и разработки нефтяных месторождений в условиях рыночной экономики. – Казань: Фэн, 2009. – 727 с.
3. Северов Я.А. Сравнение гидродинамических показателей двухмерного с трехмерным моделированием пласта // Науч. труды Оренб. нефт. акцион. компании «ОНАКО». – 2001. – № 3. – С. 165–169.
4. Булыгин Д.В., Булыгин В.Я. Геология и имитация разработки залежей нефти. – М.: Недра, 1996. – 382 с.
5. Плехотников С.П., Богомолов В.А., Булгакова О.Р. Модифицированные проницаемости, основанные на модели схемы струй для бета-распределения и его частных случаев // Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева. – 2010. – № 4. – С. 171–175.
6. Султанов Р.А., Слабнов В.Д., Фукин И.А., Скворцов В.В. К проблеме оптимального регулирования процесса извлечения нефти с учетом вероятностного закона распределения некоторого параметра слоистого пласта // Проблемы управления. – 2009. – № 6. – С. 28–34.
7. Slabnov V.D. Mathematical simulation of the oil production regulation process from inhomogeneous reservoir // Proc. Int. Conf. "Complex systems: control and modeling problems" June 15–17, 1999, Samara, Russia. – Самара: Самар. науч. центр РАН, 1999. – Р. 72–76.
8. Слабнов В.Д., Скворцов В.В. Численное определение давления и оптимальных показателей скважин при решении краевых задач двухфазной фильтрации с помощью линейного программирования // Матем. моделирование. – 2009. – Т. 21, № 11. – С. 83–98.
9. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.: Недра, 1982. – 407 с.

Поступила в редакцию  
25.08.13

---

**Слабнов Виктор Дмитриевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий, Институт экономики, управления и права, г. Казань, Россия.

E-mail: [slabnov@ieml.ru](mailto:slabnov@ieml.ru)